LS 9 Avril Sfax **Devoir de Synthèse n°2** **M^r Masmoudi et M^r Driss**

4^è Maths **2001 / 2002**

Exercice n°1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de coté a, D , E , F les points des segments [AB], [BC], [CA] tels que : AD = BE = CF = $\frac{a}{3}$

1) a) Montrer que DF = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Montrer que DEF est équilatéral de sens direct

2) Soit G le centre de gravité de ABC ($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

Montrer que $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$. En déduire que G est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF

3) Montrer que s'il existe une similitude directe qui transforme ABC en DEF, alors son centre est G

4) Soit R la rotation de centre G telle que R(A) = B

Montrer que R laisse globalement invariant les triangles ABC et DEF

5) On pose k = $\frac{GD}{GA}$ et $(\widehat{\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GD}})\equiv\theta(2\pi)$

a) Montrer que GE = kGB , GF = kGC , $(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GE}})\equiv\theta(2\pi)$, $(\widehat{\overrightarrow{GC};\overrightarrow{GF}})\equiv\theta(2\pi)$

b) En déduire que DEF est l'image de ABC par une similitude directe s de centre G

Déterminer k et θ , caractériser s

6) On pose $\sigma = s \circ S_{(GA)}$.

a) Déterminer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$. Montrer que σ est une similitude indirecte , préciser son rapport

b) Déterminer la droite Δ telle que : $r_{(G,\theta)} = S_{\Delta} \circ S_{(GA)}$.

c) Caractériser σ et déterminer $\sigma(C)$.

Exercice n°2

On considère la fonction F de IR vers IR définie par $F(x) = \int_0^x \frac{3dt}{5+2(e^t+e^{-t})}$

1) a) Montrer que F est définie sur IR et calculer F(0)

b) Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F '(x)

c) Montrer que F est impaire

2) Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

a) Démontrer que : $\varphi\langle IR\rangle =]-1\,;1[$

b) En déduire l'existence de la fonction G définie par $G(x) = \int_0^{\varphi(x)} \frac{6dt}{9-t^2}$

c) Montrer que G est dérivable sur IR et que G'(x) = F'(x) ; $\forall x\in IR$.

d) En déduire G(x) = F(x) ; $\forall x\in IR$

3) a) Vérifier que ;$\forall t\in IR - \{-3\,;3\}$ on a : $\frac{6}{9-t^2} = \frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t}$. En déduire l'expression de G(x)

b) Quelle est la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$? Dresser le tableau des variations de la fonction F et construire sa courbe représentative

Problème

I) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Log}(\frac{x+1}{x})$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère ON

2) Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par : $g(x) = \frac{1}{x+1} - \mathrm{Log}(\frac{x+1}{x})$

Montrer que sa courbe représentative (C') et la courbe (C) de f sont symétriques par rapport au point $\Omega(-\frac{1}{2},o)$.Construire (C')

3) Soit k un réel strictement positif , calculer $\int_1^k \text{Log}(\frac{x+1}{x})\,dx$. Donner l'expression de $\int_1^k f(x)dx$

II) 1) Soit m un réel strictement positif

a) Montrer que l'on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$, en déduire que : $\frac{1}{m+1} \leq \text{Log}(\frac{m+1}{m}) \leq \frac{1}{m}$

b) Montrer que : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

2) Pour tout n de IN*-{1},on pose $\alpha_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$; $\beta_n = \text{Log}n$; $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}$

a) Montrer que ; $\forall n \in$ IN*-{1} on a : $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(\gamma_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$

3) On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur IN*-{1} par :

$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1} - \text{Log}n$ et $v_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} - \text{Log}n$

a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

b) Montrer que ; $\forall\, n \in$ IN*-{1} on a : $0 \leq u_n \leq v_n \leq 1$

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l qui appartient à]0 ;1[

III) 1) a) Pour tout n de IN* on pose $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

En utilisant : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; simplifier l'expression de S_n . Montrer que la suite (S_n) est convergente et calculer sa limite

b) Montrer que : $0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n) \leq S_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n)]$

2) On définit la suite (w_n) sur IN* par : $w_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$

Vérifier que : $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n) = w_n - \text{Log}2 - \text{Log}\,[1+\frac{1}{2n}]$

Déduire que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite

3) Pour tout n de IN* on pose $a_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{6}) + \ldots\ldots\ldots + (\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})$

a) Calculer : $I_1 = \int_0^1(1-t)dt$ et $I_k = \int_0^1(t^{2k-2}-t^{2k-1})dt$, $\forall\, k \geq 2$.

En déduire que : $a_n = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots\ldots + I_n = \int_0^1(\frac{1-t^{2n}}{1+t})dt$

b) Montrer que: $\left| a_n - \int_0^1\frac{dt}{1+t} \right| \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire que (a_n) est convergente et donner sa limite

c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in$ IN* on a : $a_n = w_n - \frac{1}{n}$

Calculer $\int_0^1\frac{dt}{1+t}$ et retrouver la limite de la suite (w_n)